LA RAZÓN HISTÓRICA. Revista hispanoamericana de Historia de las Ideas. ISSN 1989-2659

Matemáticas o la fábula de Hiperión[1].

Prof. Dr. Álvaro Antón Sancho

Profesor de Matemáticas. Universidad de Valladolid (España).[2]

Resumen

En este trabajo presentamos y analizamos algunos de los momentos fundamentales de la evolución de la matemática y los interpretamos en aras a dilucidar una correcta concepción de esta ciencia dentro del conocimiento humano a partir de su evolución histórica. Esto nos permitirá obtener una adecuada visión de la matemática en cuanto a su relación con el mundo natural y con el conocer del hombre.

Palabras clave: matemática griega, modelo matemático, realismo, formalismo, incompletitud.

Abstract

In this paper we present and analyze some of the key moments in the evolution of mathematics and interpret them in order to elucidate a correct understanding of this science within human knowledge from its historical evolution. This will allow us to obtain an adequate view of mathematics in their relationship with the natural world and human knowledge.

Keywords: Greek mathematics, mathematical model, realism, formalism, incompleteness.

---

[1] "¡Permíteme, naturaleza esplendorosa, volver a contemplar tu calma!" (Hölderlin, 1976, p.176).

[2] Dpto. Didáctica de las Ciencias Experimentales. Escuela Universitaria de Magisterio "Fray Luis de León". Universidad de Valladolid. C/Tirso de Molina, 44. 47010 Valladolid. Tlf. 983 354090. alvaro.anton@eumfrayluis.com

Introducción

Es habitual hoy una presentación un tanto deficitaria de los contenidos matemáticos en las aulas escolares y universitarias. Porque es cierto que una mayoría de nosotros mismos, los profesionales de la matemática, tenemos una concepción prosaica de lo que el conocimiento matemático representa. Para unos, la matemática es una herramienta, a la par sofisticada y potente, ordenada a la resolución de problemas prácticos ajenos a ella misma; para otros, la matemática es una maraña de pensamientos separados de la realidad cuya única razón de ser es la de ser recibidos y, a su vez, ser transmitidos a la siguiente generación.

Pero esto no fue así en el principio. En los albores de la matemática, cuando hace más de veinticinco siglos los pitagóricos comenzaron a sistematizar un pensamiento geométrico ordenado, ésta se entendía como la esencia misma de la naturaleza, "raíz y fuente" rezaban los documentos más primitivos del pitagorismo[3]. Esta concepción, matizada por los avatares de la historia del pensamiento, se mantuvo sin embargo intacta en el fondo mientras atravesaba los caminos del neoplatonismo, la escolástica, la nueva ciencia de Galileo, Kepler… Hoy mismo, cuando enfocamos desde las ecuaciones el estudio del universo, por ejemplo, de algún modo asumimos, sin saberlo, la idea básica de un cosmos ordenado por la geometría y la proporción numérica.

Repasaremos aquí brevemente algunos de los momentos fundacionales de la matemática como ciencia[4] y trataremos de identificar en su evolución histórica las claves que nos permitan devolver a las matemáticas hoy una luz nueva (y, en cierto modo, también antigua) para poder contemplarla en su lugar adecuado dentro del conocimiento humano.

La génesis de los conceptos matemáticos

Para el pitagorismo más primitivo, desde el mismo Pitágoras, en el siglo VI a.C., la esencia del universo es su orden y su armonía y el conocimiento del mismo se hace particularmente claro, por tanto, a través del estudio del número y sus proporciones. La idea es que la matemática goza del estatus de un tipo de saber contemplativo que penetra en todas las dimensiones del ser de los fenómenos físicos. De esta manera, para el pitagorismo, la matemática no es sólo un acto creativo, sino, fundamentalmente, un acto de contemplación de la realidad, en el que el mundo toma la iniciativa de presentarse al hombre y expresarse en los términos más profundos que éste puede comprender y manejar: la cantidad y sus relaciones.

El universo es, para Pitágoras, *cosmos*, es decir, orden, armonía inteligible a través del número, esencia de todas las cosas. Numerosos neoplatónicos se hacen cargo

---

[3] Cf. González Urbaneja (2001).
[4] Cf. Bourbaki (1972).

de esta idea pitagórica y la expresan de maneras más o menos audaces. Filolao la traslada a términos de la teoría del conocimiento cuando dice que “todo lo cognoscible tiene un número, pues no es posible que sin número nada pueda ser concebido ni conocido”. Por su parte, Porfirio extrema la cuestión a términos metafísicos: “Para Pitágoras los números eran símbolos jeroglíficos mediante los cuales explicaban las ideas relacionadas con la naturaleza de las cosas”. Sin embargo, es Aristóteles quien, entendemos, da la clave de interpretación de la matemática pitagórica. Dice en el libro I de la *Metafísica*:

> [Los pitagóricos] supusieron que las cosas existentes son números – pero no números que existen aparte, sino que las cosas están realmente compuestas de números –, es decir, los elementos de los números son los elementos de todos los seres existentes y la totalidad del universo es armonía y número[5].

En este texto, Aristóteles indica el núcleo doctrinal de la matemática pitagórica. Para los pitagóricos, la matemática nace de una hipótesis sobre la realidad (“supusieron”, dice Aristóteles), la más afortunada de las conjeturas[6], según la calificó el matemático Alfred Whitehead en 1925: que ésta es exhaustivamente descriptible en términos del número y sus relaciones y que esta descripción brota de la misma naturaleza de las cosas, por eso la actitud adecuada al matemático es, principalmente, la contemplación.

Aristóteles explica a renglón seguido las razones de la génesis de esta hipótesis pitagórica. Pitágoras llegaría a esta reflexión tras sus viajes por Oriente Próximo. De Egipto asumió el vínculo entre figuras geométricas (planas y espaciales) y proporción numérica y de Mesopotamia que los movimientos de los astros están regidos por leyes numéricas. Pero el núcleo parece estar en su propia experiencia personal, que le llevó a descubrir en las escalas musicales relaciones sencillas entre números enteros. Si las formas de los objetos, el movimiento de los astros y el comportamiento del sonido son expresables en términos numéricos, entonces es que el número es “el principio, la sustancia y la causa de todas las cosas”.

Es importante señalar que en sus inicios, la matemática no distinguía entre números y puntos geométricos, de la misma forma que no se distingue entre cuerpo físico y cuerpo geométrico. Para los pitagóricos, el punto es una unidad con posición en el espacio, de modo que un cuerpo es una pluralidad de posiciones, algo así como la delimitación de una localización espacial. Por eso la base de la naturaleza es numérica, porque todo cuerpo está compuesto de puntos, líneas, superficies y finalmente volúmenes. De ahí la correlación pitagórica entre aritmética y geometría que, en cierto modo, ha asumido toda la matemática occidental, y que está en la base de los grandes desarrollos matemáticos de la Grecia primitiva: el teorema de Pitágoras o el descubrimiento de la sección áurea a partir del pentágono regular (llamado pentagrama).

---

5 Aristóteles (2008, p.52).
6 Whitehead (1967).

Justamente estos dos descubrimientos estuvieron en la base de la primera gran crisis de la fundamentación de la matemática porque llevaban un germen que destruía aparentemente el núcleo dogmático de su doctrina: el paralelismo entre número y representación geométrica. El estudio del triángulo rectángulo exigió expresar la conmesurabilidad de la hipotenusa con el lado o, lo que es lo mismo, expresar la relación entre la diagonal del cuadrado con el lado en términos sencillos (racionales), lo cual es imposible, como sabemos. $\sqrt{2}$ es la primera experiencia de la matemática griega con la irracionalidad[7].

El descubrimiento de los irracionales provocó un escándalo lógico en la matemática pitagórica. La razón fundamental es la aparente falta de adecuación entre los nuevos conceptos que la matemática construía y la expresión de la realidad natural, lo que exigía una revisión de los fundamentos de la matemática. A esta tarea se dedicó Eudoxo, quien resolverá el problema introduciendo el concepto de "tan pequeño como se quiera", que está en el fundamento del moderno diferencial que formalizará más tarde el cálculo infinitesimal de Leibniz y Newton. De esta manera se puede entender el número irracional como un paso al límite a partir de los números racionales y obtenemos un modelo eficaz para el estudio de las magnitudes continuas (como el tiempo). Estas magnitudes ya eran objeto de preocupación en el pensamiento griego (recuérdense las paradojas de Zenón). Con ello se ha recuperado el vínculo de estos nuevos conceptos con la realidad natural.

Todos estos desarrollos inauguran un proceso de abstracción en matemáticas, siempre bajo la actitud fundamental de contacto con la naturaleza. Es necesario destacar aquí la monumental obra de Aristóteles en la *Lógica*, cuyo logro consiste en sistematizar los procesos de razonamiento para evitar la confusión que había dado lugar a las paradojas antes mencionadas. De esta forma, la matemática perfila sus límites de una manera mucho más precisa: consiste ya en un proceso de abstracción de la realidad de sus dimensiones cuantificables (que agotan el ser de las cosas, si seguimos el sentir pitagórico). Esto es la moderna formulación de axiomas. Y razonar con ellos de modo correcto según las leyes del silogismo aristotélico. Se está inaugurando una dinámica de ida y vuelta entre la realidad y la corrección del razonamiento que funcione, dice Leibniz[8] como "hilo de Ariadna" entre lo que la realidad muestra de sí misma y lo que la geometría y la aritmética son capaces de formular a partir de sus propias técnicas y herramientas. Culmen de este proceso es la obra de recopilación del saber geométrico abstracto llevado a cabo por Euclides en los *Elementos*.

Vemos cómo la matemática griega llega, avanzada la época clásica, a estructurarse en una ciencia formal de la realidad con una conexión de origen con el mundo natural, según el adagio escolástico *nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu* (no hay nada en el entendimiento que no estuviera primero en la percepción). Esta es la visión que se mantuvo en la matemática medieval y que, no exenta de dificultades, ha sido preponderante muy entrada ya la modernidad. La matemática habla de la realidad porque no hace sino razonar lógicamente con las

[7] González Urbaneja (s.f. cap.2).
[8] Bourbaki (1972, p.19).

dimensiones que ha heredado de ella misma a partir de la observación; *Hipothesis non fingo* (No elaboro hipótesis) dice Newton en el prólogo de los *Principia mathematica philosophiae naturalis*.

Modelización matemática de la realidad: realismo y formalismo

Hasta ahora hemos podido extraer el sentido del quehacer matemático, que podemos sintetizar en la expresión "modelización de la realidad natural". Conviene examinar con más detenimiento en qué consiste este proceso de modelización, que es en el fondo un viaje de ida y vuelta a la realidad, como hemos dicho.

Podemos identificar dos etapas en la elaboración de un modelo matemático de la realidad natural. En primer lugar, un acercamiento, digamos, "matemático" al mundo. Confluyen aquí dos elementos: uno objetivo (la realidad que se presenta al matemático) y otro subjetivo (la mente del matemático que abstrae las dimensiones cuantificables de esa realidad presentada: formas, longitudes, superficies, volúmenes, velocidades, fuerzas…). Es un acercamiento, por tanto, intencional, no puramente contemplativo, como aseguraban los pitagóricos. Es verdad que la iniciativa, la voz cantante, la lleva la realidad física. Primero porque existe (donde podría no existir, parafraseando la famosa duda heideggeriana; y esta existencia no depende de la voluntad del matemático). Segundo, porque es la que se presenta ante la mente del matemático. Pero éste, al abstraer de aquella realidad presentada las dimensiones medibles y tratables en términos ecuacionales, la mutila, quedándose con las piezas de su interés, que posteriormente conceptualiza.

En segundo lugar, la elaboración de un modelo matemático de esa realidad observada. Este modelo consiste en un edificio conceptual, lógico, que abarca exclusivamente aquellas dimensiones de la realidad que hayan sido previamente abstraídas por el matemático. Tiene como finalidad la descripción y comprensión del fenómeno observado. En este sentido, la matemática es recreación, emulación verosímil de la naturaleza según un ordenamiento lógico de causa-efecto: fábula, si empleamos la terminología de Aristóteles en la *Poética*. Es, por tanto, la fábula del mundo natural y sus interacciones. Sintéticamente podríamos decir que se trata de la fábula de Hiperión, según hemos titulado esta lección, porque Hiperión es uno de los titanes de la mitología griega encargado de la observación y descripción del dinamismo de la naturaleza.

Un hecho radicalmente importante aquí es que, en aquellas dimensiones de su competencia, existe una asombrosa adecuación entre el modelo matemático y el funcionamiento de la realidad. Esto es una constante en la historia de la matemática, aunque comúnmente el modelo matemático se adelante en el tiempo a la experiencia misma del fenómeno natural. Tal es el caso bien conocido del asombroso desarrollo de la geometría de las cónicas en la Grecia de Apolonio (s. III a.C.), que encontró su correlato físico natural diecinueve siglos después en las leyes de Kepler del movimiento de los astros.

Por otra parte, este proceso de modelización, si bien comienza con un proceso de abstracción desde la realidad, no compromete de modo absoluto al matemático más allá de las reglas de la lógica. Al contrario, la realidad observada abre habitualmente un rico campo de posibilidades válidas a la hora de modelar matemáticamente el fenómeno. La autonomía del matemático, que es una nota fundamental de su quehacer, fue destacada por Cantor al manifestar que "la esencia de las matemáticas consiste en su libertad".

La matemática, por tanto, de acuerdo a su referencia constante al mundo físico, que modela con pretensión de comprenderlo, es una ciencia de descubrimiento de la realidad. Pero, habida cuenta del grado de libertad introducido por la misma naturaleza del hombre al conocer, hay también en la matemática un ámbito de creación, de invención. Descubrimiento y creación, realismo y formalismo, son ámbitos que se unen íntima y armónicamente en las matemáticas en su intento de modelar los fenómenos de la realidad.

Las matemáticas no sólo tienen ojos para contemplar. Las matemáticas tienen tacto. Acarician el mundo desde fuera, haciéndolo suyo cada vez más, como en un intento desesperado de poseerlo. Y la realidad le responde desdoblando la nitidez del habla: dejándose querer y, a la vez, ocultando pudorosa, lo más íntimo de sí.

Es común en la historia de las matemáticas la presencia de concepciones insuficientes para explicar la amplitud de miras de esta ciencia. Cuando se niega el vínculo originario y fundacional de la matemática respecto de la realidad, se absolutiza el ámbito formalista y se llega a posiciones como la de Bertrand Russell, quien en 1901 definía las matemáticas como "el campo en que nunca sabemos de qué estamos hablando ni si lo que decimos es verdadero"[9]. La matemática de Russell es una suerte de juego lógico inadecuado a realidad alguna externa a la razón. No es una concepción que goce de sustento histórico, pues la matemática no ha abrazado este formalismo extremo en ningún momento de su historia. Pensar, crear, descubrir en matemáticas sería lo mismo que soñar; es la "geometría del sueño" del famoso poema de Gabriel Celaya dedicado al descubrimiento de las leyes del movimiento de Kepler, de quien acabó admitiendo: "Estaba equivocado, mas los astros giraban"[10]. Es expresión de la misteriosa pero real semejanza entre lo pensado por el matemático y lo expresado por la realidad.

En sentido opuesto se encuentra la de los representantes del realismo matemático absoluto, para quienes el vínculo entre la realidad y el modelo matemático es biunívoco, despreciando la pérdida de información que se produce en el proceso de abstracción. Es una especie de sublimación de la hipótesis pitagórica arcaica que presupone (y esto es mera hipótesis nuevamente) que no hay más dimensiones en los cuerpos que aquellas que son cuantificables. Esta postura, parcial e insuficiente, como hemos visto, está en la base del mecanicismo y del fisicismo modernos, los padres del positivismo científico. Compromete seriamente la pretensión de las matemáticas de elaborar afirmaciones universalmente válidas acerca de sus objetos de interés, niega el ser de los objetos más allá de un mero

---

[9] Russell (1901).
[10] *Así soñé yo la verdad*, de Gabriel Celaya.

funcionamiento mecánico y constituye, por ello, un torpedo en la línea de flotación del mismo saber científico.

Una crisis "infinita"

En su tarea de modelar los fenómenos de la realidad, la historia de las matemáticas está plagada de intentos que, en general, combinan dos elementos fundamentales: la asombrosa adecuación del modelo al fenómeno pero, a la vez, la imperfecta adecuación del modelo al fenómeno, que hace de la matemática una ciencia en constante renovación de sí misma. La matemática modela aproximaciones de la realidad, aproximaciones que son cada vez más sutiles y completas, que profundizan cada vez más en el fenómeno y en las relaciones entre ellos, con el fin de dar una explicación unitaria de todos. Al mismo tiempo son aproximaciones imperfectas, que manifiestan cómo la realidad es siempre más rica que el modelo.

La pregunta ahora es si este procedimiento de aproximaciones sucesivas propio de la matemática puede llegar a elaborar una réplica cognoscitiva del fenómeno natural (lo que significaría que la pretensión de la matemática de explicar los fenómenos naturales es legítima) o si, por el contrario, estas aproximaciones sucesivas tienden a un modelo límite que nunca podrán alcanzar, aunque se acerquen, digamos, asintóticamente, a él. En el fondo, queremos ver si las matemáticas constituyen un camino seguro de conocimiento exhaustivo de los fenómenos del mundo natural o si hay dimensiones en la realidad física que exceden necesariamente toda aspiración matemática.

La clave para responder a esto la da el concepto matemático de infinito. El infinito es una noción irrenunciable en la matemática. Es cierto que no tenemos una percepción inmediata de la infinitud. Pero no es menos cierto que poseemos experiencia de cantidades finitas cualesquiera, lo que nos hace adquirir conciencia de que cualquier cantidad finita puede ser superada. Este hecho está presente en el proceso de matematización de la cantidad, de elaboración abstracta de número, de modo que cuando contamos: 1,2,3,..., en esos puntos suspensivos aparece el infinito como fundamento del contar mismo.

El infinito está presente en nuestra mente de modo atemático, es decir, sin conexión inmediata a un objeto. El número 3 está en nuestra mente en cuanto tenemos experiencia de conjuntos de tres mesas o de tres personas; no tenemos experiencia de conjuntos de infinitas mesas o personas. Y, sin embargo, el infinito es el concepto fundante de la presencia en nuestra mente de todo número (abstracto) finito. Conocemos el infinito sólo a partir del conocimiento particular que tenemos de cantidades finitas y, en cambio, el concepto matemático de infinito es fuente y fundamento de la noción de número (finito).

Un sistema matemático que no sea estrictamente formal (en el sentido que hemos explicado) debe admitir en su seno el infinito como concepto, porque si no, no habría siquiera posibilidad de numeración natural. Pero esta exigencia nos obliga a pagar un precio. Éste fue determinado por Kurt Gödel en su tesis doctoral[11] del año 1931 con estas palabras: "En cualquier sistema matemático que pueda desarrollar

[11] Hofstadter (1989).

la aritmética de los números naturales existen proposiciones P que son indecidibles, es decir, P no se puede demostrar, pero tampoco no-P se puede demostrar".

Este es el contenido del primer teorema de Gödel de la incompletitud aritmética. En el fondo el mensaje es que la matemática (como sistema no formalista, sino formalista-realista) debe abdicar toda pretensión de cubrir exhaustivamente el conocimiento de los cuerpos y sus interacciones a través de sus dimensiones cuantificables. Y la razón está en la presencia del infinito dentro del sistema. Es decir, aquello que está en el fundamento de la presencia en el sistema de toda noción de cantidad es justamente lo que establece la frontera de aquello que el propio sistema puede conocer.

En virtud del vínculo matemática-realidad que hemos explicado, podemos extraer el correlato en cuanto al conocimiento del mundo natural se refiere. ¿Qué es aquello que, como el infinito respecto del número, está fundamentando las dimensiones medibles de los cuerpos? La esencia, el ser del objeto en cuestión. Lo que dice el teorema de Gödel es que desde los modelos que elabora la matemática, podemos conocer la esencia de los cuerpos pero sólo parcialmente, no exhaustivamente. Nos está mostrando que la esencia de los objetos es algo más que la mera concatenación de sus dimensiones cuantificables; es un algo que da unidad a todas esas dimensiones y es fuente y fundamento de todas ellas, sin poderse identificar con ninguna.

El ser de cada cuerpo; el equilibrio de todos los cuerpos que interactúan en la naturaleza, y que forman un todo dinámico; finalmente el ser de ese todo unitario y dinámico. A toda esta riqueza de realidad nos vamos acercando a través del proceso matemático de modelación de los fenómenos naturales. Pero es un acercamiento, nos dice el teorema de Gödel, asintótico. Acercamiento real, que nos aporta información, conocimiento de la realidad. Pero conocimiento siempre inconcluso. Conocimiento que se acerca al ser de las cosas cada vez más sin poder llegar nunca a aprehender el fundamento y fuente del ser de la cosa que estudia.

Las dimensiones fundamentales de la realidad no pueden subsumirse en un modelo matemático. Nunca se pueden alcanzar ascendiendo por la escala del esfuerzo matemático. Y sin embargo, tenemos intuición inmediata de esas dimensiones con la sola percepción. El estudio geométrico de un edificio no puede llegar al ser mismo del edificio y, sin embargo, ningún estudio geométrico sobre el mismo sería posible si no tuviéramos conocimiento del ser del edificio previamente a acercarnos al mismo con intención matematizante.

Es como si los mismos objetos de la realidad física proyectaran una sombra sobre el ser íntimo de las cosas. Pero es un velo inalcanzable desde las fuerzas matemáticas, solamente superable con una actitud contemplativa ante la realidad. Es, finalmente, como si a la pregunta angustiada de nuestro querido fray Luis de León: "¿Qué mortal desatino de la verdad aleja así el sentido que, de tu bien divino, olvidado, perdido, sigue la vana sombra, el bien fingido?"[12] pudiera responder San Juan de la Cruz: "¡Qué bien sé yo la fonte que mana y corre, aunque es de noche!

[12] *Oda VIII, Noche serena*, de Fray Luis de León.

Aquella eterna fuente está escondida. ¡Qué bien sé yo do tiene su manida, aunque es de noche!”[13].

Referencias bibliográficas

Aristóteles (2008). *Metafísica*. Madrid: Alianza Editorial.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.

González Urbaneja, P.M. (2001). *Pitágoras. El filósofo del número*. Madrid: Nivola.

González Urbaneja, P.M. (s.f.). *Los orígenes de la geometría analítica*. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

Hofstadter, D.R. (1989). *Gödel, Escher, Bach*. Barcelona: Tusquets.

Hölderlin, F. (1976). *Hiperión o el eremita en Grecia*. Madrid: Ediciones Hiperión.

Russell, B. (1901). Mathematics and the Metaphysicians, *International Monthly* 4, 83-101.

Whitehead, A.N. (1967). *Science and the modern world*. Nueva York: The Free Press.

[13] *Cantar del alma que se huelga a conocer a Dios por la fe*, de San Juan de la Cruz.